

# Modèles d'endommagement par level-set épaisse. Solutions analytiques et simulations

C. Stolz<sup>1</sup>, N. Moës<sup>2</sup>, P. E. Bernard<sup>2</sup>, N. Chevaugeon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMS, CNRS UMR7649, École Polytechnique & LaMSID, EdF-CEA- CNRS UMR2832, France, stolz@lms.polytechnique.fr,

<sup>2</sup> GEM, CNRS UMR6183, École Centrale Nantes, France, nicolas.moes@ec-nantes.fr

**Résumé** — En endommagement brutal, la rupture se fait le long d'une frontière mobile accompagnée de discontinuités fortes du gradient du déplacement. On propose un modèle d'endommagement plus régulier fondé sur le mouvement d'une couche de largeur finie  $l_c$  au sein de laquelle l'endommagement varie de façon continue. Cette approche permet dans un même cadre d'initier et de propager des défauts.  
**Mots clés** — endommagement, level-set, frontière mobile.

## 1 Introduction

Dans le cas de l'endommagement brutal, la zone endommagée est décrite comme une zone ne pouvant supporter des efforts de traction à partir d'une valeur critique de contrainte, d'énergie ou de déformation. À partir de cette seule propriété, la dissipation est obtenue sous la forme d'une intégrale sur le front [8]

$$D_m = \int_{\Gamma} g(s) a(s) ds$$

où  $g(s)$  désigne le taux de restitution d'énergie locale et  $a(s)$  la vitesse de propagation normale du front d'endommagement. Plusieurs formulations variationnelles ont été données pour étudier la stabilité et la non bifurcation du front d'endommagement  $\Gamma$ . Les problèmes en vitesse étudiés montrent que, dans le cas fragile, l'évolution n'est pas toujours unique, il y a souvent multiplicité de solutions pour des critères de type Griffith

$$a(s) \geq 0, \quad g(s) \leq g_c, \quad (g(s) - g_c)a(s) = 0.$$

Ce modèle ne contient pas de longueur caractéristique. Par ailleurs, il a été montré que la prise en compte d'une énergie de surface  $\beta$  rend le front plus stable [7] car le nouveau taux de restitution d'énergie devient

$$g_{\beta}(s) = g(s) - \Gamma(s)\beta \leq G_c,$$

où apparait la courbure du front. Cette approche étudie de fait la propagation d'un front existant et ne permet pas de décrire la phase d'initiation d'un défaut, même si des critères d'initiation de défauts ont été formulé à partir d'analyse de bifurcation d'un défaut infinitésimal [10]. Il est par ailleurs facile de montrer que la présence d'une énergie de surface induit une charge critique infinie quand le front se réduit à un défaut sphérique de rayon infinitésimal.

Pour pallier ces difficultés, on propose une nouvelle formulation de l'endommagement fondée sur la propagation d'une zone de transition continue entre le milieu sain et le milieu rompu dans une couche d'épaisseur finie.

## 2 Le modèle d'endommagement

On considère un corps  $\Omega$  soumis à des efforts de surface  $\underline{T}^d$  sur  $\partial\Omega_T$  et des déplacements  $\underline{u}^d$  sur la partie complémentaire de la frontière  $\partial\Omega_u$ . Sous l'influence de ce chargement le corps se déforme, on note  $\underline{u}$  le champ de déplacement sur  $\Omega$ .

Le corps est constitué d'un matériau élastique endommageable dont l'énergie libre  $w(\underline{\varepsilon}, d)$  est fonction de la déformation  $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u})$  et d'une variable d'endommagement  $d, 0 \leq d \leq 1$ . On note de

façon classique les forces thermodynamiques associés aux paramètres

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}, Y = -\frac{\partial w}{\partial d}.$$

Pour un tel milieu la dissipation mécanique intrinsèque s'écrit

$$D_m = \int_{\Omega} Y \dot{d} \, d\Omega \geq 0.$$

Sur les surfaces, séparant d'une part le milieu sain du milieu endommagé  $\Gamma_o$  et d'autre part le milieu endommagé et le milieu rompu  $\Gamma_c$ , on montre que l'énergie est continue et que le tenseur des contraintes est continu. Il n'existe pas de surface de discontinuités fortes du gradient du déplacement le long de ces lignes.

La level-set  $\phi = 0$  sépare la zone saine de la zone endommagée. On propose de décrire l'endommagement  $d$  comme une fonction continue explicite  $d(\phi)$  de la level-set choisie ici comme une fonction distance à la surface  $\phi = 0$ , [6]. Dans le domaine où le gradient de la level-set est continu, nous avons la caractérisation

$$d = 0, \phi \leq 0 \quad ; \quad d'(\phi) \geq 0, 0 \leq \phi < l_c \quad ; \quad d(\phi) = 1, \phi \geq l_c.$$

Cette représentation est illustrée Figure 1. La distance minimale pour laquelle l'endommagement entre en point à l'état  $d = 0$  et un point  $d = 1$  est  $l_c$ .

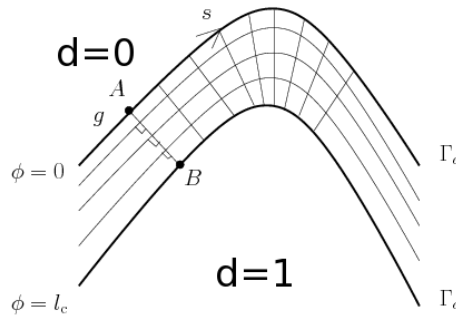


FIG. 1 – Le repère local

Utilisant cette définition, la dissipation devient

$$D_m = \int_{\Gamma} \int_0^l Y d'(\phi) (1 - \Gamma\phi) \dot{\phi} \, d\phi \, ds.$$

L'évolution de la level-set est donnée par une équation de transport convectif

$$\dot{\phi} - a(s) \nabla \phi \cdot \underline{\underline{v}} = 0,$$

où la vitesse  $a$  est la vitesse normale aux iso- $\phi$  et  $\underline{\underline{v}} = \nabla \phi / \|\nabla \phi\|$  est la normale à la level-set  $\phi = l$ . On en déduit alors que la force thermodynamique locale associée au mouvement de la zone de transition paramétrée par l'abscisse  $s$  et la cote  $z = \phi$  est définie par

$$D_m = \int_{\Gamma} g(s) a(s) \, ds, \text{ où } g(s) = \int_0^l Y \nabla d \cdot \underline{\underline{v}} (1 - \Gamma\phi) \, d\phi.$$

Dans cette expression apparaît l'influence de la courbure. La vitesse de propagation  $a(s)$  est à déterminer par une loi d'évolution. Plusieurs lois peuvent être proposées :

- On propose la loi particulière analogue au critère de Griffith ( $l(s) \leq l_c$ )

$$a(s) \geq 0, \quad g(s) \leq \bar{g}(s) = \int_0^l Y_c \nabla d \cdot \underline{\underline{v}} (1 - \Gamma\phi) \, d\phi, \quad (g(s) - \bar{g}(s)) a(s) \leq 0,$$

qui correspond à un critère moyen critique sur la bande

- ou bien un critère plus classique ( $l(s) \leq l_c$ )

$$a(s) \geq 0, \quad g(s) \leq Y_c l(s), \quad (g(s) - Y_c l(s)) a(s) \leq 0.$$

Ces lois, de part leur définition, vérifient naturellement la positivité de la production intérieure d'entropie.

### 3 Un exemple élémentaire.

On considère une barre de longueur  $L$  composée d'un matériau endommageable. La barre est fixée en  $x = 0$ , on impose le déplacement  $u(L) = U$  en  $x = L$ . Dans la barre l'état de contrainte est uniforme  $\sigma = \Sigma$ . Le milieu sain 1 se transforme en un milieu 2 sur une bande de largeur maximale  $2e = l_c$ . Initialement la barre est constituée du matériau sain. À partir d'un certain seuil une zone de matériau transformé apparaît puis quand cette zone atteint la largeur  $l_c$ , elle se déplace à une vitesse déterminée par le chargement.

**État initial et conditions d'équilibre.** La barre initialement de module délasticié  $E_1$  possède une énergie à l'équilibre donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{L}{E_1}$$

Pour une valeur critique  $\sigma_c$  locale la zone de transition se développe à partir de  $x = 0$  d'épaisseur  $2e_o$ . On suppose alors que le module d'Young  $E$  varie dans cette bande comme une fonction  $E = E(z)$  de la coordonnée  $z$  relative à la fibre moyenne  $x_m$ .  $E$  passe de la valeur  $E_1$  à la valeur  $E_2$  sur une épaisseur  $2e$ . Par exemple, on peut prendre

$$\frac{2}{E} = \frac{1 + \frac{z}{e}}{E_1} + \frac{1 - \frac{z}{e}}{E_2}, \text{ ou bien } 2E(z) = \left(1 + \frac{z}{e}\right)E_1 + \left(1 - \frac{z}{e}\right)E_2$$

**La dissipation locale.** Le module d'Young dépend de la position, cette valeur est conservée dans le mouvement d'avancée de la bande en translation à la vitesse  $a$ . La dissipation en un point de la bande s'écrit donc sous cette hypothèse de stationnarité locale, qui préserve la forme de  $E(z)$  :

$$d_m = -\frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{E'}{E^2} a.$$

La dissipation totale  $D_m$  est l'intégrale de  $d_m$  sur l'épaisseur de la bande.

**L'énergie du système à l'équilibre.** L'énergie de la barre s'écrit suivant les phases d'endommagement de la barre

- Phase 1, pas d'endommagement

$$W = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{L}{E_1}.$$

- Phase 2, initiation et formation de la bande  $e_o \leq e$  :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{L - 2e_o}{E_1} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \int_0^{2e_o} \frac{dx}{E(z)},$$

où  $z(x) = x + e - 2e_o$  en effet au point  $x = 2e_o$  la valeur de  $z$  est  $e$ .

- Phase 3, propagation de la bande d'épaisseur  $2e$

$$W = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{L - x_m - e}{E_1} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \int_{x_m - e}^{x_m + e} \frac{dx}{E(z)} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{x_m - e}{E_2}.$$

où  $z(x) = x - x_m + e$ .

**Analyse de la dissipation globale.** Par définition, la dissipation est donnée par  $D_m = \Sigma \dot{E} - \frac{dW}{dt}$ , avec  $E = U/L$ . Pendant la phase 1, la dissipation est nulle. Pendant la phase 2, la vitesse d'avancée de la fibre moyenne de la bande est  $a = \dot{e}_o$  :

$$\frac{dW}{dt} = E_2 : \dot{\Sigma} + \frac{\partial W}{\partial e_o} \dot{e}_o, \quad E_2 = \Sigma \left( \frac{L - 2e_o}{E_1} + \int_0^{2e_o} \frac{dx}{E(z)} \right).$$

Au cours de la phase 3, la vitesse d'avancée est  $a = \dot{x}_m$  :

$$\frac{dW}{dt} = E_3 : \dot{\Sigma} + \frac{\partial W}{\partial x_m} \dot{x}_m, \quad E_3 = \Sigma \frac{L - x_m - e}{E_1} + \Sigma \int_{x_m - e}^{x_m + e} \frac{dx}{E(z)} + \Sigma \frac{x_m - e}{E_2}.$$

**Analyse de la dissipation lors de la phase 2.** La vitesse de déformation de la barre est

$$\dot{E}_2 = \dot{\Sigma} \left( \frac{L - 2e_o}{E_1} + \int_0^{2e_o} \frac{1}{E(z)} dx \right) + \Sigma \left( \frac{-2\dot{e}_o}{E_1} + \frac{2\dot{e}_o}{E(e)} \right) - \Sigma \left( \int_0^{2e_o} \frac{E'}{E^2} \frac{\partial z}{\partial e_o} dx \right) 2\dot{e}_o$$

La variation d'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial e_o} \cdot \dot{e}_o = \frac{1}{2} \Sigma^2 \left( \frac{-2\dot{e}_o}{E_1} + \frac{2\dot{e}_o}{E_1} \right) - \frac{1}{2} \Sigma^2 \int_0^{2e_o} \frac{E'}{E^2} \frac{\partial z}{\partial e_o} dx 2\dot{e}_o.$$

En définitive, la dissipation s'écrit

$$D_m = \frac{1}{2} \Sigma^2 \int_0^{2e_o} \frac{E'}{E^2} \frac{\partial z}{\partial e_o} dx \dot{e}_o = -\frac{1}{2} \Sigma^2 \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E(e - 2e_o)} \right) 2\dot{e}_o$$

**Analyse de la dissipation lors de la phase 3.** Pour la phase trois, on trouve de façon analogue

$$D_m = -\frac{1}{2} \Sigma \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \dot{x}_m$$

la forme de la dissipation est indépendante de la distribution particulière des modules dans la bande. On retrouve ici la dissipation d'une ligne de discontinuité entre un matériau 1 et un matériau 2 se déplaçant à la vitesse  $\dot{x}_m$  et de taux de restitution d'énergie  $g = \frac{1}{2} \Sigma^2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right)$  comme décrit en [8].

**Cas particulier de loi d'endommagement.** Prenons une énergie libre de la forme classique

$$w = \frac{1}{2} \kappa(d) E_o \underline{\underline{\epsilon}}^2, \quad E_1 = E_o = \kappa(0), \quad E_2 = \kappa(1) E_o = \kappa_1.$$

Le paramètre d'endommagement est une fonction de  $d(\phi)$  qui varie entre  $d(0) = 0$  et  $d(1)$ , on pose  $d(\phi) = \phi/l_c$ ,  $l_c = 2e$ , et on prend  $\phi = (1 - \frac{z}{e})/2$ . Exprimons, les forces thermodynamiques locales et globales, ainsi que la forme du critère.

$$Y = -\kappa' \frac{1}{2} E_o \underline{\underline{\epsilon}}^2 = \frac{1}{2} \kappa' \frac{\Sigma^2}{E_o \kappa^2}, \quad g(s) = \frac{\Sigma^2}{2E_o \kappa(d(l))} (1 - \kappa(d(l))), \quad g_c(s) = Y_c d(l)$$

Quand  $l \rightarrow 0$ , le critère donne la valeur critique de contrainte pour laquelle il y a initiation du défaut

$$Y_c = \frac{\Sigma^2}{2E_o} \kappa'(0)$$

À partir de cette valeur, la longueur caractéristique, varie de façon continue de 0 à  $l_c$ .

## 4 Dissipation dans une bande en mouvement

Pour étudier l'évolution d'une bande de transition continue, on introduit des dérivées particulières qui expriment l'évolution des quantités mécaniques et géométriques liées au mouvement d'une ligne (ou surface) en mouvement [9]. On se place ici dans le cas plan. Sous l'hypothèse locale de stationnarité, la dissipation s'exprime en fonction du tenseur d'Eshelby. Par passage à la limite ( $l_c \rightarrow 0$ ) on montre que la dissipation est celle associée à une ligne de discontinuités fortes.

Soit  $M_t$  un point géométrique de  $\Sigma_t$ , d'abscisse curviligne  $s$  à l'instant  $t$  et  $m$  le point de l'arc déplacé par la vitesse  $\underline{\phi}(s)$  pendant le temps  $dt$ .

$$m = M_{t+dt} = M_t + \underline{\phi}(s) dt.$$

L'équation d'une ligne donnant la position d'un point  $M_t$  à chaque instant est une équi-potentielle du plan :  $S(M_t, t) = 0$ . La normale à l'équipotentielle est  $\underline{\nu} = \frac{\partial S}{\partial M} / \left\| \frac{\partial S}{\partial M} \right\|$ . En comparant deux positions successives au cours du temps, nous avons

$$S(M_{t+dt}, t + dt) = S(M_t, t) + \left( \frac{\partial S}{\partial M} \cdot \underline{\phi} + \frac{\partial S}{\partial t} \right) dt + o(dt^2) = 0.$$

On en déduit alors que

$$\frac{\partial S}{\partial M} \cdot \underline{\phi} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

L'évolution de la surface à chaque instant est déterminée au point courant par la vitesse normale  $a(s) = \underline{\phi} \cdot \underline{v}$ .

**Géométries actuelle et transportée.** Soit  $\underline{\tau}$  le vecteur tangent en  $M$  à  $\Sigma_t$  et les propriétés classiques du repère de Fresnet :

$$\frac{dM}{ds} = \underline{\tau}, \quad \frac{d\underline{\tau}}{ds} = \Gamma \underline{v}, \quad \frac{d\underline{v}}{ds} = -\Gamma \underline{\tau},$$

où  $\Gamma$  désigne la courbure de l'arc au point d'abscisse  $s$ . Entre deux instants, la position d'un point de la surface a évolué :  $m = M + \underline{\phi}(s) dt$ , on en déduit le repère de Fresnet transporté. On introduit ainsi la dérivée, directionnelle des quantités géométriques  $G$  exprimées à l'instant  $t$  et  $t + dt$ , suivant le champ  $\underline{\phi}$  par

$$D_\phi G = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{G_{t+dt} - G_t}{dt}.$$

Ainsi, on obtient pour les principales quantités géométriques

$$D_\phi \underline{\tau} = \frac{d\phi}{ds} \cdot \underline{v} \underline{v}, \quad D_\phi \underline{v} = -\frac{d\phi}{ds} \cdot \underline{v} \underline{\tau}, \quad D_\phi \Gamma = \underline{v} \cdot \frac{d^2\phi}{ds^2} - 2 \frac{d\phi}{ds} \cdot \underline{\tau}.$$

Quand la vitesse d'avancée de la ligne est portée par sa normale  $\underline{\phi} = a(s)\underline{v}$ , la dérivée  $D_\phi G$  est notée  $D_a G$ . Dans la suite on suppose que  $\underline{\phi} = a(s)\underline{n}$ . Soit un point  $\underline{X}$  de la zone de transition et soit  $f(\underline{X}, t)$  une quantité mécanique, sa variation temporelle est

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Le point  $\underline{X}$  est défini par ses coordonnées locales  $(s, z)$  telles que  $\underline{X} = M_t(s) + z \underline{v}(s)$ . À l'instant  $t + dt$ , la position géométrique du point  $\underline{X}$  restant à la distance  $z$  de la surface actuelle est  $\underline{x} = m + z \underline{v}_+$ . On en déduit alors, d'après ce qui précède,

$$D_a \underline{X} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\underline{x} - \underline{X})}{dt} = a(s)\underline{v} - z \frac{da}{ds} \underline{\tau}$$

La variation de la quantité mécanique  $f$  en suivant le mouvement est alors

$$D_a f = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(\underline{X} + \eta D_a \underline{X}, t + \eta) - f(\underline{X}, t)}{\eta} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \cdot D_a \underline{X}$$

Pour la fonction distance  $\phi$  par rapport à la ligne  $\Sigma_t$   $\phi(\underline{X}, t) = z$ , nous avons  $\nabla \phi = \underline{v}$ ,  $\Delta \phi = -\frac{\Gamma}{1 - z\Gamma}$  et  $D_a ds = -\Gamma a ds$ .

**Variations de quantité moyenne.** On doit aussi étudier l'évolution des quantités mécaniques moyennes

$$\int_B f d\Omega = \int_S \int_0^l f(1 - z\Gamma) dz ds,$$

pour définir en particulier les variations d'énergie et la dissipation. Prenons  $f = w(\underline{\varepsilon}, \alpha)$ ,  $A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$  et supposons que la dissipation n'ait lieu que dans la bande, alors

$$D_m = \int_B A \frac{d\alpha}{dt} d\Omega = \int_B A (D_a \alpha - \nabla \alpha \cdot D_a \underline{X}) d\Omega.$$

Introduisons le tenseur d'Eshelby  $\underline{\underline{P}} = w \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} u$ , ce tenseur satisfait l'équation de conservation

$$\text{div} \underline{\underline{P}}^T = -A \cdot \nabla \alpha.$$

Ainsi la dissipation s'écrit

$$D_m = \int_B A.D_a \alpha \, d\Omega + \int_B \text{div } \underline{\underline{P}}^T . D_a \underline{X} \, d\Omega .$$

Si la transformation est localement stationnaire  $D_a \alpha = 0$ , la dissipation peut alors être évaluée par

$$D_m = - \int_B \underline{\underline{P}} : \nabla D_a \underline{X} \, d\Omega + \int_{\partial B} \underline{n} . \underline{\underline{P}} . D_a \underline{X} \, ds,$$

où  $D_a \underline{X} = D_a M$  pour la surface  $\phi = 0$  et  $D_a \underline{X} = D_a M + D_a l \, \underline{v} + l \, D_a \underline{v}$  pour la surface  $\phi = l$ . Dans cette approche fondée sur les propriétés de la zone de transition apparaît deux termes l'un provenant du mouvement de la bande, l'autre de sa variation d'épaisseur.

Pour les lois d'endommagement  $\alpha = d$ , l'énergie est  $w = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : E(d) : \underline{\underline{\epsilon}}$ , la dissipation se met sous la forme :

$$D_m = \int_B \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\epsilon}}) \, d\Omega,$$

qui devient dans le repère de la zone de transition en mouvement

$$D_m = \int_B \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{\underline{\epsilon}} - \nabla \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}) . D_a \underline{X} \, d\Omega.$$

Par intégration par parties on obtient :

$$D_m = - \int_{\partial B} \frac{1}{2} (\underline{n} . \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{u} - \underline{n} . \nabla \underline{\underline{\sigma}} . \underline{u}) . D_a \underline{X} \, ds + \int_B \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{u} - \nabla \underline{\underline{\sigma}} : \underline{u}) . \nabla D_a \underline{X} \, d\Omega.$$

Pour un mouvement de vitesse normale  $D_a \underline{X} = D_a M + z D_a \underline{v}$ , lorsque l'épaisseur  $l$  de la bande tend vers 0, la valeur de la dissipation devient

$$D_m = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\underline{\underline{\sigma}}]_{\Gamma} : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\sigma}} : [\underline{\underline{\epsilon}}]_{\Gamma} \, ds \quad a$$

laquelle est celle due aux discontinuités pour une ligne de discontinuités mobiles.

## 5 Algorithme et simulation

Pour déterminer le champ de propagation  $a$ , on propose de le décomposer suivant des fonctions de forme ad hoc [6]

$$a(s) = \sum_I a_I F_I(s).$$

Introduisant cette décomposition dans les expressions de la dissipation et du critère, on introduit les décompositions

$$g(s) = \sum_I G_I F_I(s), \quad \bar{g} = \sum_i G_{cI} F_I(s)$$

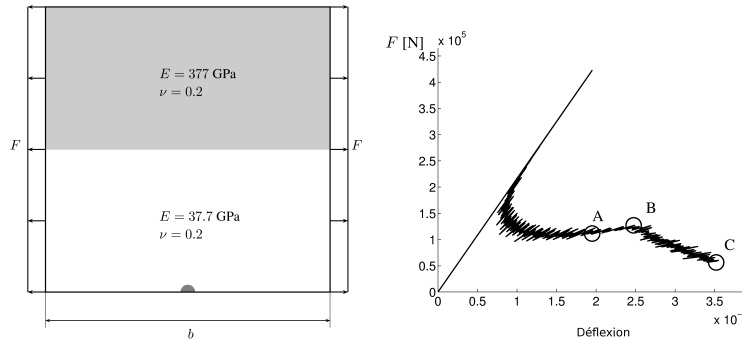


FIG. 2 – Description de la géométrie et du chargement et courbe effort déflexion

La loi de propagation étant formulée, on est conduit à résoudre par un principe d'extrémum qui détermine les valeurs  $a_I$ . Après mise en oeuvre de l'algorithme [6], on étudie l'initiation et la propagation de zones endommagées. On donne ici l'exemple d'une propagation dans un bimatériau, voir Figure 2.

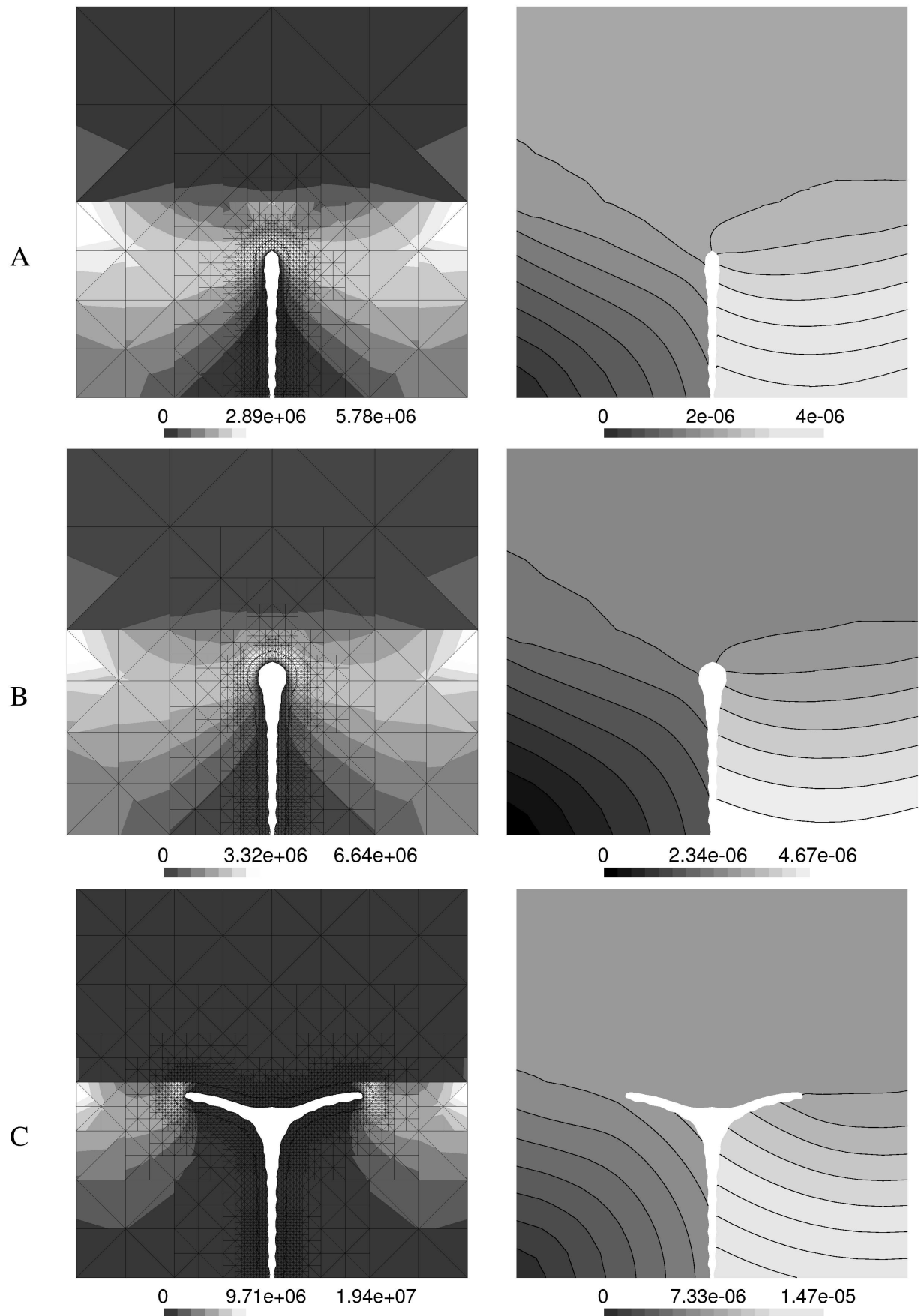


FIG. 3 – Avancée de l'endommagement et champ de contraintes, champ de déplacement

## 6 Conclusion

On a montré la faisabilité d'une approche unifiée de l'initiation de défauts et de la propagation de zones endommagées. Il reste cependant à mener de nombreuses études notamment pour déterminer en fonction du comportement et du critère les domaines de stabilité et de bifurcation des solutions. La comparaison avec d'autres méthodes comme celles des champs de phase ou des théories de gradient supérieures reste un champ ouvert à diverses investigations. L'avantage de la nouvelle approche est qu'elle peut s'appliquer à tout comportement, elle propose un suivi des zones endommagées depuis l'initiation jusqu'à la rupture ; la taille de la zone endommagée ne dépend pas du maillage..

## Références

- [1] G. Allaire, N. Van Goethem, F. Jouve. *A level set method for the numerical simulation of damage evolution*, Rapport 626, Centre de mathématiques appliquées, Ecole polytechnique, 2007.
- [2] B. Bourdin, G. Francfort, J.J. Marigo. *The variational approach to fracture*, Journal of elasticity, Springer, 91 :5-148, 2008.
- [3] A. Karma, D. Kessler, H. Levine. *Phase-field model of mode III dynamic fracture*, Phys Review letters, 8704 (4) 2001.
- [4] D. Leguillon. *A damage model based on singular elastic fields*. Comptes Rendus Mécanique, Elsevier, 336 :283-288, 2008.
- [5] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker. *Thermodynamically consistent phase field models of fracture : Variational principles and multifield FE implementations*. Int. J. for Numer. Methods in Engineering, Wiley, 83 (10) : 1273-1311, 2010.
- [6] N. Moës, C. Stolz, P-E Bernard, N. Chevaugeon. *A level set based model for damage growth : the thick level set approach*, Int. J. Numer. Meth. Engng, John Wiley & Sons, Ltd, on line, 2010.
- [7] Q.S. Nguyen, R.M. Pradeilles, C. Stolz. *Sur une loi régularisante en rupture et endommagement fragile*, Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris, Série II, 309 :1515-1520, 1989.
- [8] R.M. Pradeilles Duval, C. Stolz. *Mechanical transformations and discontinuities along a moving surface*, J. Mech. Phys. Solids, Elsevier, 43 :91-121, 1995.
- [9] C. Stolz. *Thermodynamical description of running discontinuities*, Entropy, Mdpi, 12 :1418-1439, 2010.
- [10] C. Stolz. *Bifurcation of equilibrium solutions and defects nucleation*, International Journal of Fracture, Springer, 147 :103-107, 2007.